Πόρισμα: Έστω $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I και έστω ότι f έχει σχετ. ακρότατο σε εσωτερικό σημείο $c \in I$. Τότε η $f'(c) \nexists$ ή $f'(c) = 0$

Π.χ. η $f(x) = |x|$ στο $I = [-1, 1]$ έχει σχετικό ακρότατο στο εσωτερικό σημείο $c = 0$ αλλά $f'(0) \nexists$

Παρατήρηση: Στο $x = 1$ η f έχει σχ. ακρότατο

$f(x) \leq f(1) \quad \forall x \in (1-\delta, 1]$

$$\rightsquigarrow \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \geq 0 \quad \forall \quad x \neq 1$$

$\rightsquigarrow f'(1) \geq 0$

Θεώρημα Rolle

Έστω f συνεχής στο κλειστό διάστημα $I = [a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R})$

$f'(x) \ \exists \quad \forall x \in (a, b)$ και $f(a) = f(b) = 0$.

Τότε $\exists \ c \in (a, b)$ τ.ω. $f'(c) = 0$.

Απόδειξη

Αν f ταυτοτικά ίση με μηδέν, τότε $f'(c) = 0 \ \forall c \in (a, b)$

Άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f \neq 0$ και ότι $\exists \ x_0 \in (a, b)$ τ.ω. $f(x_0) > 0$ (1)

(αν όχι θεωρώ την $-f$) Από το θεώρημα Μεγίστου-Ελαχίστου $\exists c \in [a, b]$ όπου η f λαμβάνει ολικό μέγιστο, δηλαδή

$f(x) \leq f(c) \quad \forall x \in [a, b]$

Μάλιστα $f(c) \geq f(x_0) > 0$ (από (1))

Άρα αφού $f(a) = f(b) = 0 \Rightarrow c \in (a, b)$

δηλαδή $f'(c) \ \exists$

Αφού η f έχει σχετικό μέγιστο στο c (μιας και εκεί έχει ολικό μέγιστο), c εσωτερικό σημείο και $f'(c) \ \exists$

$\Rightarrow f'(c) = 0$

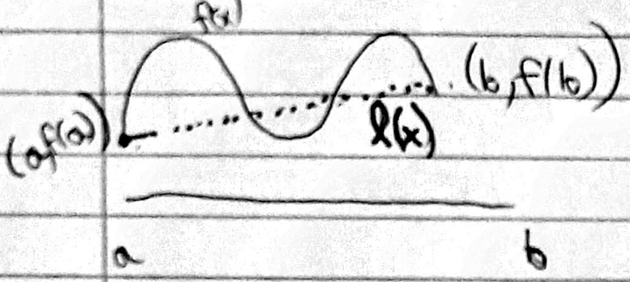
(από θεωρ. εσωτερικού ακροτάτου)

Θεώρημα Μέσης Τιμής

Έστω f συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστ. $[a,b]$ και $f'(x)\ \exists\ \forall x\in(a,b)$

Τότε $\exists\, c\in(a,b)$ τ.ω. $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Απόδειξη



$$l(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Το $l(x)$ είναι η ευθεία που περνάει από τα σημεία $(a,f(a))$ και $(b,f(b))$

Θέτουμε $\phi(x)=f(x)-l(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

Η ϕ είναι συνεχής στο $[a,b]$

$\phi'\ \exists\ \forall x\in(a,b)$

$\phi(a)=\phi(b)=0$

$$\left.\begin{array}{l} \xrightarrow{\text{Rolle}}\ \exists\, c\in(a,b) \text{ τ.ω. } \phi'(c)=0 \\ \phi'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\quad \forall x\in(a,b) \end{array}\right\} \rightsquigarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Θεώρημα: Έστω $f\in C([a,b])$, $f'(x)\ \exists\ \forall x\in(a,b)$ και $f'(x)=0\ \forall x\in(a,b)$. Τότε η f είναι σταθερή

Απόδειξη

Αρκεί ν.δ.ο. $f(x)=f(a)\ \forall x\in[a,b]$.

Πράγματι, έστω τυχαίο $x \in (a,b]$. Από Θ.Μ.Τ.:
$\exists\, c \in (a,x)$ τ.ω.
$$f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
Το c εξαρτάται από το x

Όμως έχουμε $f'(c) = 0$ (αφού $c \in (a,x) \subseteq (a,b)$)
$\Rightarrow f(x) = f(a)$

Εφαρμογή: $\sqrt{105} = ;$ $\sqrt{100} = 10$ $\sqrt{121} = 11$

$\rightsquigarrow$ $10 < \sqrt{105} < 11$

$f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Κάνουμε Θ.Μ.Τ. στο $[100,105]$
$\rightsquigarrow \exists\, c \in (100,105)$ τ.ω $\dfrac{f(105) - f(100)}{105 - 100} = f'(c) = \dfrac{1}{2\sqrt{c}}$

$\sqrt{100} < \sqrt{c} < \sqrt{121} = 11$
$\rightsquigarrow \dfrac{1}{11} < \dfrac{1}{\sqrt{c}} < \dfrac{1}{10}$
$\rightsquigarrow \dfrac{1}{22} < \dfrac{\sqrt{105} - 10}{5} < \dfrac{1}{20}$
$\rightsquigarrow 102272 < \sqrt{105} < 102500$

Άσκηση: $f'(x)$ $\exists$ $\forall x \geq 0$ και $\lim_{x \to \infty} f'(x) = 0$
Ν.δ.ο. $\lim_{x \to \infty} (f(x+1) - f(x)) = 0$

Από Θ.Μ.Τ. στο $[x, x+1]$, $\exists\, c \in (x, x+1)$ τ.ω.
$$f'(c) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f(x+1) - f(x) \quad \forall x \geq 0$$
$\rightsquigarrow f(x+1) - f(x) = f'(c)$ για κάποιο $c \in (x, x+1)$
Όταν $x \to +\infty$ $\rightsquigarrow$ $c \to +\infty$ $(x \leq c)$

No. Date

Άρα $\lim_{x\to+\infty} f'(c_x)$ (θέτουμε $t = c_x$ $= \lim_{t\to+\infty} f'(t) = 0$)

Άσκηση: $f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ διαφ. στο $(0,+\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = b \in \mathbb{R}$

Για σπίτι

(α) Ν.δ.ο. $\forall h > 0 \rightsquigarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = b$. (1)

(β) Ν.δ.ο. αν επιπλέον $f(x) \to a$, $x \to +\infty$, τότε $b = 0$.

Έστω $b > 0$ Ισχύει από (1) $\exists L > 0$ τ.ω. $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} > \frac{b}{2}$ $\forall x > L$

Από τον ορισμό του ορίου με $\epsilon = \frac{b}{2}$

$\epsilon = \frac{b}{2}$ $\epsilon = \frac{b}{k}$

$\rightsquigarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq \left(1-\frac{1}{k}\right)b$ $\forall x > L_k$

$\left(1+\frac{1}{k}\right)b \geq$

$\xrightarrow{(2)\text{ με } h=1}$ $f(x+h)-f(x) > \frac{b}{2}$ $\forall x > L$ καθώς $x \to +\infty$ $\underset{\frac{a-a}{b}}{0} > \frac{b}{2}$ Άτοπο

(γ) Ν.δ.ο. $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = b$.

Πόρισμα: Έστω $f, g \in C[a,b]$ και f, g διαφορ. στο (a,b) με $f'(x) = g'(x)$ $\forall x \in (a,b)$. Τότε $\exists$ σταθ. $K \in \mathbb{R}$ τ.ω. $f(x) = g(x) + K$

Απόδειξη

Θέτω $h = f - g$: $h \in C[a,b]$, $h'(x)$ $\exists$ $\forall x \in (a,b)$

No. Date

$h'(x)=0 \quad \exists\ \forall x\,(a,b) \Rightarrow h$ σταθερή
(δηλ. $h=k$)

(ανάλογης μορφής διαστήματα)

Θεώρημα: Έστω $f: I \to \mathbb{R}$ διαφορ στο I. Τότε:
(a) $f \nearrow$ στο I αν και μόνο αν $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$
(b) $f \searrow$ στο I αν και μόνο αν $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$

Απόδειξη

(a) $\{\Leftarrow\}$ Υποθέτω ότι $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$. Αν $x_1, x_2 \in I$
θ.δ.ο. $f(x_1) \leq f(x_2)$

Εφαρμόζω το Θ.Μ.Τ. στο $J=[x_1, x_2]$ και
βρίσκουμε $c \in (x_1, x_2)$ τω. $f'(c) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

Άρα $f(x_2)-f(x_1) = \underbrace{f'(c)}_{\geq 0}\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0} \geq 0$ δηλαδή $f \nearrow$

$\{\Rightarrow\}$ Υποθέτουμε ότι f διαφορ στο I και $f \nearrow$

Έστω $c \in I$. Τότε αφού $f \nearrow$: $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 \quad \forall x \in I$ με $x \neq c$

$\left.\begin{matrix} x>c \\ x<c \end{matrix}\right\}$ επειδή $f \nearrow$ ο αριθμητής ίδιο πρόσημο με παρονομαστή

$\Rightarrow f'(c) = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$

(b) Ομοίως

Σημείωση: Αν $f'>0 \quad \forall x \in I \rightsquigarrow f \nearrow$
δεν ισχύει πάντα το αντίστροφο π.χ. x^3

Για σπίτι

Άσκηση: Αν $f\in C(\mathbb{R})$ και $\lim_{x\to\pm\infty} f=+\infty$ Ν.δ.ο. f λαμβάνει ολικό ελάχιστο

Υπόδειξη: $\exists\, L$ τ.ω. $f(x)\geq f(0)+1$ $\forall x$ με $|x|>L$

Άσκηση: Έστω $a_1, a_2, \dots, a_n\in\mathbb{R}$ και $f(x)=\sum_{i=1}^{n}(a_i-x)^2$, $x\in\mathbb{R}-L$

Ν.δ.ο. f έχει ολικό ελάχιστο και να βρεθεί πού λαμβάνεται

Άσκηση: Ν.δ.ο. $|\sin x-\sin y|\leq|x-y|$ $\forall x,y\in\mathbb{R}$

Έστω $x<y$ (Δ.Β.Γ)

Από Θ.Μ.Τ. στο $[x,y]$ για την $f(x)=\sin x$ $(f'(x)=\cos x)$

$\exists\, c\in(x,y)$ με $f'(c)=\dfrac{\sin x-\sin y}{x-y}$ η f είναι παραγ.

$=\cos c \longrightarrow \left|\dfrac{\sin x-\sin y}{x-c}\right|=|\cos c|\leq 1$

Για σπίτι

Ν.δ.ο. $|\cos x-\cos y|\leq|x-y|$

$f'(x)=-\sin x$

Για σπίτι

Άσκηση: Γιατί $\lim_{x\to+\infty}\cos x$ δεν υπάρχει

Άσκηση: Βρείτε σχετικά ακρότατα και διαστήματα μονοτονίας για τις:

$f(x)=x+1/x$ $x\neq 0$ $h(x)=\sqrt{x}-2\sqrt{x+2}$ $x>0$

$g(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ $x\in\mathbb{R}$